آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی و تجربی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ در یک دنباله هندسی بین ۴ و ۳۲۴ سه واسطه هندسی قرار دهید.

۲ اگر $۲x+۱$، $x+۱$ و $۲x-۱$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، x را به دست آورید.

۳ دنباله $۳, ۱۰, ۲۱, ۳۶, \ldots$ را در نظر بگیرید.

الف جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ب یک الگوی مناسب برای آن رسم کنید.

۴ نقطه P به طول $\frac{۲}{۳}$ روی دایره مثلثاتی و در ناحیه چهارم قرار دارد. اگر θ زاویه بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{OX}$ باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را پیدا کنید.

هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۵ $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$

۶ $r - r^۲ = ۳$

۷ $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹$

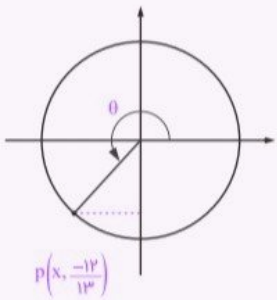
۸ $\frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

۹ رأس سهمی به معادلهٔ $y = ۲(x + ۲)^۲ + ۱$ را مشخص کرده و سپس به کمک آن، نمودار سهمی را رسم کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ مجموع ۵ جمله اول دنباله حسابی ۲۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن ۷۵ است. دنباله را مشخص کنید.

۱۱ باتوجه‌به شکل داده‌شده، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. (شعاع دایره، ۱ واحد است.)



۱۲ درستی اتحاد زیر را اثبات نمایید.

$$\frac{\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}=\sin^{۲}\alpha$$

۱۳ با فرض آنکه $۰ < a < ۱$ باشد، عبارات زیر را باهم مقایسه کنید.

$\sqrt[n]{a} \square \sqrt[n+۱]{a}$

$a^{n} \square a^{n-۱}$

۱۴ درستی رابطهٔ مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(\tan x+\cot x)^{۲}-(\frac{۱}{\sin^{۲}x}+\frac{۱}{\cos^{۲}x})=۰$$

۱۵ حاصل عبارت زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\frac{x^{۲}+۳x+۹}{x^{۳}-۲۷}+\frac{x^{۴}-۱}{x^{۳}+x}$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۱۶

$$(\pi+۲)^{\sqrt{۲}-۱}(\pi-۲)^{\sqrt{۲}-۱}$$

۱۷ در سهمی $y=۲x^{۲}+۳x+۱$ مختصات رأس سهمی و محور تقارن آن را به‌دست آورید.

۱۸ بین دو عدد $\frac{۳۲}{۳}$ و ۸۱ چهار واسطهٔ هندسی درج شده است. آن‌ها را مشخص کنید.

۱۹ اگر $x-۴$، $x-۲$ و $x+۴$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار x را بیابید.

۲۰ عبارت $a^{۶}-۲b^{۶}+۲a^{۳}b^{۳}$ را تجزیه کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۱ حاصل عبارت‌های زیر را در صورت امکان به‌صورت توان گویا بنویسید.

الف

$$\frac{(\sqrt[5]{27})^{\frac{1}{6}} + \sqrt[15]{\sqrt{27}}}{(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{10}}}$$

ب

$$\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{5-2\sqrt{6}}$$

پ

$$\sqrt[3]{3\sqrt[5]{9}}$$

هر یک از عبارت‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

۲۲ $x^6 - 1$

۲۳ $x^4 + 2x^2 - 3$

۲۴ $2x^2 + 3x + 1$

۲۵ $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۶ فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، طول و عرض قالی را به دست آورید.

۲۷ جملهٔ چندم دنبالهٔ هندسی داده‌شده برابر $\frac{۵۱۲}{۷۲۹}$ می‌باشد؟

$۱۸, -۱۲, ۸, \ldots$

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۲۸

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

۲۹

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}} \times \frac{\ldots\ldots}{\sqrt[۳]{۴^۲}} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

۳۰ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید، سپس درستی آن را ثابت کنید.

۳۱ نامعادلهٔ $5x-1\geq 3x-7$ را حل کنید.

۳۲ معادله $2x^2+8x-10=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۳ یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن $a = ۰$ است، پیدا کنید.

هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۳۴ $n^۲ - ۲ = ۲۶$

۳۵ $x^۲ + ۱۲ = ۳$

۳۶ $(۳t - ۲)^۲ = ۴$

۳۷

$$۳ - ۳k = ۳k(۲k - ۱)$$

۳۸ اگر α در ناحیهٔ دوم باشد و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

با فرض با معنی بودن هر کسر درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۳۹

$$\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$$

۴۰

$$\frac{\cos\theta}{۱ + \sin\theta} = \frac{۱ - \sin\theta}{\cos\theta}$$

۴۱

$$\frac{۱ + \tan\alpha}{۱ + \cot\alpha} = \tan\alpha$$

۴۲

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

۴۳

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

۴۴ اگر $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ باشد، حاصل عبارت‌های داده‌شده را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |2\tan\alpha + \cot\alpha|$$

۴۵ معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

الف سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید:

$$y = a(x + \frac{b}{۲a})^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$$

ب با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{۲a} \ , \ \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

۴۶ مجموع سه عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند ۲۱ و مجموع مربعات آن‌ها ۲۱۹ است. سه عدد را بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱

$$۴ , \dots , \dots , \dots , ۳۲۴ \quad , \quad r = \sqrt[۵-۱]{\frac{۳۲۴}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱} = \pm ۳$$

$$r = +۳ : ۴ , ۱۲ , ۳۶ , ۱۰۸ , ۳۲۴$$

$$r = -۳ : ۴ , -۱۲ , ۳۶ , -۱۰۸ , ۳۲۴$$

۲ اگر a , b , c جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، $b^۲ = ac$ است. بنابراین:

$$(x+۱)^۲ = (۲x-۱)(۲x+۱) \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۴x^۲ - ۱$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$$

$$\Delta = ۴ - ۴(-۶) = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۲۸}}{۶} = \frac{۲ \pm ۲\sqrt{۷}}{۶} = \frac{۱ \pm \sqrt{۷}}{۳}$$

۳ **الف** الگوی غیرخطی درجه دوم

$$۳ \;,\; ۱۰ \;,\; ۲۱ \;,\; ۳۶ \;,\; \dots$$
$$۷ \;,\; ۱۱ \;,\; ۱۵$$
$$۴ \;,\; ۴$$

$$t_n = an^۲ + bn + c = ۲n^۲ + n$$

ب

۴

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۹} + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = \frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳} \xrightarrow[y<۰]{\text{ناحیه چهارم}} y = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{۵}}{۳} \quad , \quad \cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{۲}{۳}}{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۸

۵

$$۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$$

$$a = ۴, b = -۱۳, c = ۳ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱۳)^۲ - ۴(۴)(۳) = ۱۶۹ - ۴۸ = ۱۲۱$$

$\Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱۳+\sqrt{۱۲۱}}{۸} = \frac{۱۳+۱۱}{۸} = \frac{۲۴}{۸} = ۳ \\ x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱۳-\sqrt{۱۲۱}}{۸} = \frac{۱۳-۱۱}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

۶

$$r - r^۲ = ۳ \Rightarrow r - r^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow -r^۲ + r - ۳ = ۰$$

$$a = -۱, b = ۱, c = -۳ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱^۲ - ۴(-۱)(-۳) = ۱ - ۱۲ = -۱۱$$

$\Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد

۷

$$a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹ \Rightarrow a^۲ + ۲\sqrt{۳}a - ۹ = ۰$$

$$a = ۱, b = ۲\sqrt{۳}, c = -۹ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (۲\sqrt{۳})^۲ - ۴(۱)(-۹) = ۱۲ + ۳۶ = ۴۸$$

$\Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است

$$\Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۴۸}}{۲} = \frac{-۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \\ a_۲ = \frac{-۲\sqrt{۳}-\sqrt{۴۸}}{۲} = \frac{-۲\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}}{۲} = \frac{-۶\sqrt{۳}}{۲} = -۳\sqrt{۳} \end{cases}$$

۸

$$\frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰ \xrightarrow{\times ۶} ۲t^۲ - ۳t - ۹ = ۰$$

$$a = ۲, b = -۳, c = -۹ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۳)^۲ - ۴(۲)(-۹) = ۹ + ۷۲ = ۸۱$$

$\Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است

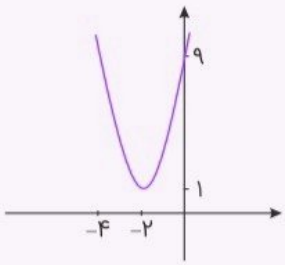
$$\begin{cases} t_۱ = \dfrac{۳ + \sqrt{۸۱}}{۴} = \dfrac{۳ + ۹}{۴} = \dfrac{۱۲}{۴} = ۳ \\ t_۲ = \dfrac{۳ - \sqrt{۸۱}}{۴} = \dfrac{۳ - ۹}{۴} = -\dfrac{۶}{۴} = -\dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

۹

$$y = ۲(x + ۲)^۲ + ۱ = ۲(x^۲ + ۴x + ۴) + ۱ = ۲x^۲ + ۸x + ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{\text{رأس}} = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-۸}{۲ \times ۲} = -۲ \\ y_{\text{رأس}} = f(-۲) = ۱ \end{cases}$$

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
y	۹	۳	۱	۳	۹



۱۰

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۲۵ \Rightarrow ۵a_۱ + ۱۰d = ۲۵$$

$$a_۶ + a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰} = ۷۵ \Rightarrow ۵a_۱ + ۳۵d = ۷۵$$

$$\Rightarrow ۲۵d = ۵۰ \Rightarrow d = ۲ \ , \ a_۱ = ۱$$

۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ...

۱۱

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{۱۲}{۱۳} \\ r = ۱ \text{ شعاع دایره} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} r^۲ = x^۲ + y^۲$$

$$\Rightarrow ۱ = x^۲ + \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow x^۲ = \frac{۲۵}{۱۶۹}$$

$$x = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow[x<۰]{\text{در ناحیهٔ سوم}} x = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin\theta = y \Rightarrow \sin\theta = -\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow \cos\theta = -\frac{۵}{۱۳}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = +\frac{۱۲}{۵}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = +\frac{۵}{۱۲}$$

۱۲

$$\frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha} = \frac{\tan^۲\alpha}{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}} = \tan^۲\alpha \cdot \cos^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} \times \cos^۲\alpha = \sin^۲\alpha$$

۱۳

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+۱]{a}$$
$$a^n < a^{n-۱}$$

۱۴

$$(\tan x + \cot x)^۲ - (\frac{۱}{\sin^۲ x} + \frac{۱}{\cos^۲ x})$$
$$= \tan^۲ x + \cot^۲ x + ۲\tan x \cdot \cot x - (۱ + \cot^۲ x + ۱ + \tan^۲ x)$$

$$= \tan^۲ x + \cot^۲ x + ۲(۱) - ۱ - \cot^۲ x - ۱ - \tan^۲ x = ۰$$

۱۵

$$\frac{x^۲ + ۳x + ۹}{x^۳ - ۲۷} = \frac{\cancel{x^۲ + ۳x + ۹}}{(x-۳)\cancel{(x^۲ + ۳x + ۹)}} = \frac{۱}{x-۳}$$
$$\frac{x^۴ - ۱}{x^۳ + x} = \frac{(x^۲ - ۱)\cancel{(x^۲ + ۱)}}{x\cancel{(x^۲ + ۱)}} = \frac{x^۲ - ۱}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ + ۳x + ۹}{x^۳ - ۲۷} + \frac{x^۴ - ۱}{x^۳ + x} = \frac{۱}{x-۳} + \frac{x^۲ - ۱}{x} = \frac{x + (x-۳)(x^۲ - ۱)}{x(x-۳)}$$
$$= \frac{x + x^۳ - x - ۳x^۲ + ۳}{x(x-۳)} = \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳}{x(x-۳)}$$

پاسخ سؤال ۱۶

۱۶

$$(\pi+۲)^{\sqrt{۲}-۱}(\pi-۲)^{\sqrt{۲}-۱}=((\pi+۲)(\pi-۲))^{\sqrt{۲}-۱}=(\pi^{۲}-۴)^{\sqrt{۲}-۱}$$

۱۷

رأس سهمی $(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ و محور تقارن آن $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

$$\frac{-b}{۲a}=\frac{۳}{۴}$$
$$\Delta=۹-۴(۲)(۱)=۱$$
$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-۱}{۸}$$

رأس : $(\frac{۳}{۴},\frac{-۱}{۸})$

محور تقارن : $x=\frac{۳}{۴}$

۱۸

$$\frac{۳۲}{۳},\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ ۸۱$$

$$\frac{a_۶}{a_۱}=r^۵=\frac{۸۱}{\frac{۳۲}{۳}}\Rightarrow r^۵=\frac{۸۱\times ۳}{۳۲}=\frac{۳^۵}{۲^۵}\Rightarrow r=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳۲}{۳},\ ۱۶,\ ۲۴,\ ۳۶,\ ۵۴,\ ۸۱$$

۱۹

$$b^۲=a\cdot c\Rightarrow(x-۲)^۲=(x-۴)(x+۴)$$
$$x^۲-۴x+۴=x^۲-۱۶\Rightarrow -۴x=-۱۶-۴\Rightarrow -۴x=-۲۰\Rightarrow x=۵$$

۲۰

$$a^۶-۲b^۶+۲a^۳b^۳=a^۶-۲b^۶+۲a^۳b^۳+b^۶-b^۶=(a^۶+۲a^۳b^۳+b^۶)-b^۶-۲b^۶=$$
$$(a^۶+۲a^۳b^۳+b^۶)-۳b^۶=(a^۳+b^۳)^۲-۳b^۶=(a^۳+b^۳-\sqrt{۳}b^۳)(a^۳+b^۳+\sqrt{۳}b^۳)$$

۲۱

الف

$$\frac{(\sqrt[۵]{۲۷})^{\frac{۱}{۶}}+\sqrt[۱۵]{\sqrt{۲۷}}}{(\sqrt[۳]{۳})^{\frac{۳}{۱۰}}}=\frac{(\sqrt[۵]{۳^۳})^{\frac{۱}{۶}}+\sqrt[۳۰]{۳^۳}}{(۳^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۱۰}}}=\frac{(۳^{\frac{۳}{۵}})^{\frac{۱}{۶}}+۳^{\frac{۱}{۱۰}}}{۳^{\frac{۱}{۱۰}}}=\frac{۲\times\cancel{۳^{\frac{۱}{۱۰}}}}{\cancel{۳^{\frac{۱}{۱۰}}}}=۲$$

ب

$$\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\times\sqrt[۴]{۵-۲\sqrt{۶}}=\sqrt[۴]{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}\times\sqrt[۴]{۵-۲\sqrt{۶}}$$
$$=\sqrt[۴]{(۳+۲+۲\sqrt{۶})(۵-۲\sqrt{۶})}=\sqrt[۴]{(۵+۲\sqrt{۶})(۵-۲\sqrt{۶})}=\sqrt[۴]{۲۵-۲۴}=\sqrt[۴]{۱}=۱$$

پ

$$\sqrt[۳]{۳\sqrt[۵]{۹}} = \sqrt[۱۵]{۳^{۵} \times ۳^{۲}} = \sqrt[۱۵]{۳^{۷}} = ۳^{\frac{۷}{۱۵}}$$

پاسخ سؤالات ۲۲ تا ۲۵

۲۲

$$x^{۶} - ۱ = (x^{۳} - ۱)(x^{۳} + ۱) = (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱)(x + ۱)(x^{۲} - x + ۱)$$

۲۳

$$x^{۴} + ۲x^{۲} - ۳ = (x^{۲} + ۳)(x^{۲} - ۱) = (x^{۲} + ۳)(x - ۱)(x + ۱)$$

۲۴

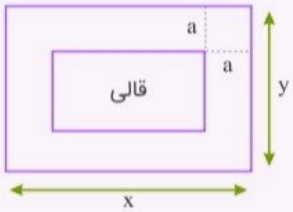
$$۲x^{۲} + ۳x + ۱ = x^{۲} + ۲x + ۱ + x^{۲} + x = (x + ۱)^{۲} + x(x + ۱)$$
$$= (x + ۱)[x + ۱ + x] = (x + ۱)(۲x + ۱)$$

۲۵

$$x^{۴} - ۳x^{۳} + ۸x - ۲۴ = x^{۳}(x - ۳) + ۸(x - ۳) = (x - ۳)(x^{۳} + ۸)$$
$$= (x - ۳)(x + ۲)(x^{۲} - ۲x + ۴)$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۶



مساحت اتاق : $xy = ۲۴$

محیط اتاق $= ۲(x+y) = ۲۰ \Rightarrow x+y = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ - x$

مساحت اتاق $= ۲۴ = x(۱۰-x) \Rightarrow ۱۰x - x^۲ - ۲۴ = ۰$

$x^۲ - ۱۰x + ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x-۴) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \Rightarrow y = ۱۰ - ۶ = ۴ & \text{ق ق} \\ x = ۴ \Rightarrow y = ۱۰ - ۴ = ۶ & \text{غ ق ق} \quad x > y \end{cases}$$

محیط قالی $= ۲(x - ۲a + y - ۲a) = ۱۲$

$x + y - ۴a = ۶ \Rightarrow ۱۰ - ۴a = ۶ \Rightarrow ۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$

طول قالی : $x - ۲a = ۶ - ۲ = ۴$

عرض قالی : $y - ۲a = ۴ - ۲ = ۲$

۲۷ خواستهٔ سؤال، شمارهٔ جمله، یعنی n است.

$r = -\frac{۲}{۳}$

$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow \frac{۵۱۲}{۷۲۹} = ۱۸(-\frac{۲}{۳})^{n-۱}$

$\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر ۱۸}} \frac{۵۱۲}{۷۲۹ \times ۱۸} = (-\frac{۲}{۳})^{n-۱}$

$\xrightarrow{\text{تجزیهٔ اعداد}} \frac{۲^۹}{۳^۸ \times ۲} = (-\frac{۲}{۳})^{n-۱}$

$\Rightarrow (\frac{۲}{۳})^۸ = (-\frac{۲}{۳})^{n-۱} \Rightarrow (-\frac{۲}{۳})^۸ = (-\frac{۲}{۳})^{n-۱} \Rightarrow n = ۹$

پاسخ سؤالات ۲۸ تا ۲۹

۲۸

$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$

۲۹

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}} \times \frac{\sqrt[۳]{۴^۲}}{\sqrt[۳]{۴^۲}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۱۶}}{۴}$$

۳۰

$$\cot\alpha(۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}) \Rightarrow \cot\alpha + \cot\alpha(\tan^۲\alpha) = \frac{\cot\alpha}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cot\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \times \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow \cot\alpha + \tan\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده را به‌عنوان یک اتحاد ثابت می‌کنیم:

$$\cot\alpha + \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

۳۱

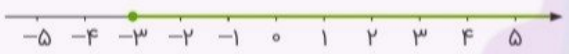
به دو طرف نامعادله، $-۳x$ را اضافه می‌کنیم:

$$۵x - ۱ - ۳x \geq ۳x - ۷ - ۳x \Rightarrow ۲x - ۱ \geq -۷ \Rightarrow ۲x \geq -۶$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow x \geq -۳$$

بنابراین، مجموعه جواب این نامعادله عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -۳\}$، که با نماد بازه، به‌شکل $[-۳, +\infty)$ نوشته می‌شود. نمایش هندسی این مجموعه به‌صورت زیر است:



۳۲

$$۲x^۲ + ۸x - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۴x - ۵ = ۰$$

$$\text{نصف } ۴ : ۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴$$

$$\sqrt{(x+۲)^۲} = \sqrt{۹} \Rightarrow x + ۲ = \pm ۳ \Rightarrow x = ۱, -۵$$

۳۳ معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل، طی مراحل زیر حل می‌کنیم:

	$ax^2 + bx + c = 0$
دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه می‌کنیم.	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
به دو طرف معادله، $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود.	$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$
دو طرف را ساده کرده‌ایم.	$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta = b^2 - 4ac$ پس: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست می‌آوریم.

اگر $\Delta < 0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت پس معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta > 0$ باشد، کافی است از دو طرف معادلهٔ $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ریشهٔ دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد، این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

پس در حالت $\Delta = 0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x = -\frac{b}{2a}$ دارد. این ریشه از معادلهٔ $(x + \frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x + \frac{b}{2a} = 0$ و $x + \frac{b}{2a} = 0$ جواب یکسان دارند. به جواب مشترک آن‌ها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم.

پاسخ سؤالات ۳۴ تا ۳۷

۳۴

$$n^2 - 2 = 26 \Rightarrow n^2 = 2 + 26 = 28$$

$$\Rightarrow n = \pm\sqrt{28} = \pm 2\sqrt{7}$$

۳۵

$$x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -12 + 3 = -9$$

$\Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$ معادله فاقد جواب حقیقی است

۳۶

$$(۳t-۲)^۲=۴ \Rightarrow ۳t-۲=\pm ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳t-۲=۲ \Rightarrow ۳t=۴ \Rightarrow t=\frac{۴}{۳} \\ ۳t-۲=-۲ \Rightarrow ۳t=۰ \Rightarrow t=۰ \end{cases}$$

۳۷

$$۳-۳k=۳k(۲k-۱) \Rightarrow ۳-۳k=۶k^۲-۳k$$

$$\Rightarrow ۶k^۲=۳ \Rightarrow k^۲=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۸

$$\tan^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{-۴}{۳}$$

$$(\frac{-۳}{۴})^۲+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۹}{۱۶}+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\begin{cases} +\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} \\ -\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} \quad \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{-۳}{۴}=\frac{\sin\alpha}{\frac{-۴}{۵}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۵}$$

پاسخ سؤالات ۳۹ تا ۴۳

۳۹

$$\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$$

$$\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

از سمت چپ تساوی، سمت راست را نتیجه گرفتیم، بنابراین این تساوی همواره برقرار است.

۴۰

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

می‌دانیم اگر تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد، رابطهٔ $ab=cd$ نیز برقرار است:

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta\times\cos\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\Rightarrow\cos^2\theta=\cos^2\theta$$

به یک تساوی همواره درست رسیدیم. چون کلیهٔ روابط بیان‌شده برای اثبات، بازگشت‌پذیر است می‌توان نتیجه گرفت $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$ یک رابطهٔ درست است.

۴۱

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\tan\alpha$$

با فرض $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$، سمت چپ تساوی را ساده کرده و جواب را به‌صورت ساده‌شده به دست می‌آوریم:

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

۴۲

$$1-\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=\sin x$$

می‌دانیم رابطهٔ $\cos^2x=1-\sin^2x$ همواره برقرار است، بنابراین داریم:

$$1-\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=1-\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}=1-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$1-(1-\sin x)=1-1+\sin x=\sin x$$

۴۳

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

با در نظر گرفتن $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، عبارت سمت چپ تساوی را به‌صورت ساده‌شده به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

صورت و مخرج این عبارت را در عبارت $1+\sin x$ ضرب می‌کنیم داریم:

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{1-\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

۴۴ α در ناحیهٔ اول مثلثاتی است و چون $45^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$\sin\alpha > \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha > 0$$

$$\tan\alpha > \cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha - \cot\alpha > 0$$

$$A = -|\sin\alpha - \cos\alpha| + |\cos\alpha + \sin\alpha|$$

$$= -\sin\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha = 2\cos 2$$

$$B = |\cot\alpha - \tan\alpha| + |2\tan\alpha + \cot\alpha|$$

$$= -\cot\alpha + \tan\alpha + 2\tan\alpha + \cot\alpha = 3\tan\alpha$$

۴۵ الف

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ درآمد؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت نقطهٔ $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$، رأس سهمی و محور تقارن سهمی، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است.

۴۶

$$a - d + a + a + d = 21 \Rightarrow a = 7$$

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 219$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 219 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

سه عدد : ۱ , ۷ , ۱۳